Введение в функциональное программирование – Лекция 5. Алгебраические типы данных. Сопоставление с образцом

Олег Смирнов
oleg.smirnov@gmail.com

14 октября 2011 г.

Содержание

Цель лекции

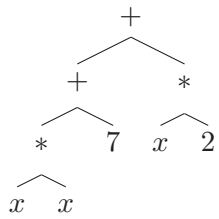
- Алгебраические типы данных и сопоставление с образцом
- Полиморфные типы данных
- Списки, деревья, тип *option*

1 Алгебраические типы данных

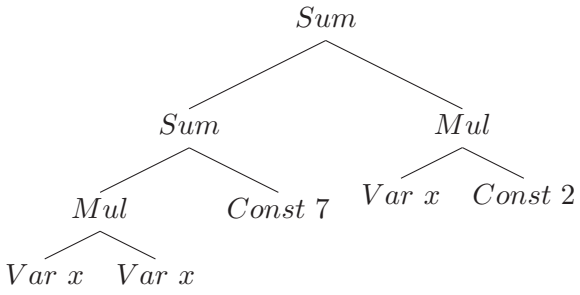
Пусть необходимо написать программу, которая бы оперировала арифметическим выражениями вида

$$2 * x + x * x + 7 \tag{1}$$

Такие выражения удобно представлять в виде синтаксических деревьев, где операции задаются узлами, их операнды – потомками, а константы хранятся в листях дерева:



В наших выражениях листья могут быть двух типов: константы, заданые целым числом, и переменные, заданые строкой-именем переменной. Определим новый тип данных, удобный для представления арифметических выражений. Пусть переменные задаются с префиксом Var, константы с префиксом $Const$, а сумма и умножение – с префиксами Sum и Mul соответственно:




```
type Expr =
  | Var of string
  | Const of int
  | Sum of Expr * Expr
  | Mul of Expr * Expr
```

В такой нотации вертикальная черта обозначает выбор из нескольких вариантов, а знак умножения в строчках с Sum и Mul – просто пару из двух значений типа $Expr$. После такого определения можно записать выражение типа $Expr$:

```
let constSeven = Const(5)
let sumOneTwo = Sum(Const(1), Const(2))
```

Выражение 1 можно определить как:

```
Sum(Sum(Mul(Var("x"), Var("x")), Const(7)),
  Mul(Var("x"), Const(2)))
```

2 Сопоставление с образцом

Тип данных $Expr$ определён как набор вариантов. Для работы с такой структурой удобно использовать оператор $match$, который сопоставляет аргумент с различными образцами. Напишем функцию, которая будет вычислять значение выражения:

```
let rec eval Expr =
  match Expr with
  | Const(c) -> c
  | Var(v) -> getVar v
  | Sum(e1, e2) -> eval e1 + eval e2
  | Mul(e1, e2) -> eval e1 + eval e2
```

В левой части каждой строки после оператора $match$ находится *образец*. В правой части после стрелочки – действие, которое выполнится, если аргумент $match$ совпадёт с данным образцом. В образцах можно использовать связывание переменных. Например, $e1$ и $e2$ будут связаны с аргументами Mul и Sum.

Расширим тип данных $Expr$, чтобы он позволял задавать не только сложение и умножение, но и другие бинарные операции. Каждая операция будет задана тремя аргументами: сигнатурой, первым аргументом и вторым аргументов. Аналогично определим унарные операции:

```
...
| Binary of Op2 * Expr * Expr
| Unary of Op1 * Expr
```

Здесь $Op2$ и $Op1$ – сигнатуры бинарных и унарных операций соответственно. Их можно определить в качестве самостоятельных типов данных:

```
Op2 = Sum | Sub | Mul | Div
Op1 = Neg
```

Теперь можно расширить функцию *eval* для поддержки новых операций:

```
let rec eval Expr =
  match Expr with
  ...
  | Binary(op, e1, e2) ->
          match op with
          | Sum -> eval e1 + eval e2
          | Mul -> eval e1 * eval e2
          | Div -> eval e1 / eval e2
          | Sub -> eval e1 - eval e2
  | Unary(op, e1) ->
          match op with
          | Neg -> not eval e1
          | _ -> eval e1
```

Допустим, на момент реализации известна только операция отрицания *Neg*. Последняя строчка функции – это "заглушка", которая сработает для любого неизвестного значения *op*. Здесь нижнее подчёркивание означает "что угодно" – универсальный образец, подходящий для всех значений. Важно помнить, что правила *match* выполняются *сверху вниз*. Т.е. все правила, записанные после сопоставления с _, никогда не выполнятся.

Предположим, что функция *eval* должна работать только с положительными константами, а все отрицательные – "сбрасывать" в ноль. Это можно записать следующим правилом:

```
match Expr with
| Const(c) when c < 0 -> 0
| Const(c) -> c
```

Условие после ключевого слова *when* называется "стражником" от англ. guard.

Правила сопоставления с образцом можно комбинировать, делая код более читабельным. Функцию вычисления факториала можно записать так:

```
let rec fact n =
  match n with
  | 0 -> 1
  | 1 -> 1
  | n -> n * fact (n - 1)
```

А можно короче, объединив в два условия с одинаковым действием:

```
let rec fact n =
  match n with
  | 0 | 1 -> 1
  | n -> n * fact (n - 1)
```

3 Абстракция данных

В такой нотации, как в примерах выше, $Const$, Var и т.п. называют *конструкторами*, т.к. они позволяют создать экземпляр данного типа. Кроме конструкторов ещё определяют *селекторы* и *предикаты*. Например, для типа $Expr$ удобно написать предикат $isConst : Expr \to bool$ и $isVar : Expr \to bool$:

```
let isConst e =
  match e with
  | Const(_) -> true
  | _ -> false

let isVar e =
  match e with
  | Var(_) -> true
  | _ -> false
```

Примером селектора может быть функция $getConst$, которая возвращает значение, если её аргумент – константа.

Для работы с графами можно задать тип данных $Graph$, у которого конструкторами будут $Node$ и $Link$ – вершина и ребро графа, соответственно. А предикатом может быть функция $isConnected$, проверяющая, является ли граф связным.

Тип данных, заданный набором своих конструкторов, селекторов и предикатов, называют *абстрактным типом данных*, т.к. его внутреннее представление скрыто от программиста. Граф типа $Graph$ может храниться в виде матрицы смежности, матрицы инцидентности или в виде списка вершин. Его *интерфейс* из конструкторов, селекторов и предикатов для любой реализации останется неизменным.

Тип данных $Expr$ называется *алгебраическим типом данных*, т.к. он представлен в виде размеченного объединения декартовых произведений множеств или, другими словами, в виде *суммы произведений типов*. Действительно, вертикальная черта, объединяющая варианты выбора между Var, $Const$ и др., эквивалентна логической операции “или” или суммированию. Знак умножения в аргументах конструкторов означает

декартово произведение и задаёт кортеж из соответствующих типов. А $Const$, Var и т.п. – это *метки* для таких кортежей.

4 Логика высказываний

Рассмотрим ещё один пример. Выражения *логики высказываний* можно определить с помощью константы T (“истина”), и операторов отрицания, конъюнкции и дизъюнкции:

```
type proposition =
  | True
  | Not of proposition
  | And of proposition * proposition
  | Or of proposition * proposition
```

Несколько примеров выражений, записанных с помощью такого типа данных:

1. $\neg T \vee \neg\neg T$

```
let prop1 = Or(Not(True), Not(Not(True)))
```

2. $\neg\neg\neg\neg T$

```
let prop2 = Not(Not(Not(Not(True))))
```

3. $\neg(T \wedge \neg T) \vee T$

```
let prop3 = Or(Not(And(True, Not(True))), True)
```

Вычислить значение выражения можно с помощью рекурсивной функции, аналогично арифметическому выражению:

```
let rec eval p =
  match p with
  | True -> true
  | Not(prop) -> not(eval(prop))
  | And(prop1, prop2) -> eval(prop1) && eval(prop2)
  | Or(prop1, prop2) -> eval(prop1) || eval(prop2)
```

Функцию *eval* легко модифицировать так, чтобы она вычисляла операторы в нормальном порядке. Например, если результат вычисления первого аргумента оператора *And* равен $false$, то второй аргумент вычислять уже не нужно.

Добавим в тип данных тернарный оператор $IfThenElse$:

```
type proposition =
  | True
  | Not of proposition
  | And of proposition * proposition
  | Or of proposition * proposition
  | IfThenElse of proposition * proposition * proposition
```

Результат вычисления $IfThenElse$ определяется следующим образом: если результат вычисления первого аргумента истинен, то вычислить второй аргумент. Иначе вычислить третий аргумент.

```
...
| IfThenElse(p1, p2, p3) ->
    if eval(p1) then eval(p2) else eval(p3)
```

Теперь наша функция позволяет вычислять условные выражения:

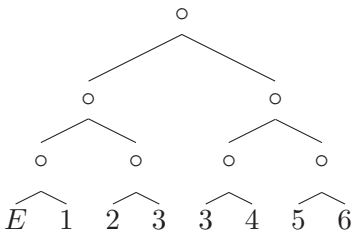
```
eval(IfThenElse(Not(True),
     Or(True, Not(True)),
     And(True, Not(True))))
val it : bool = false
```

В тип *proposition* легко добавить поддержку переменных, получив калькулятор для логики нулевого порядка.

5 Деревья и полиморфные типы данных

Существует несколько способов описания деревьев с помощью алгебраических типов данных. Разные способы удобны для разных задач. Для простоты пока будем рассматривать только бинарные деревья из целых чисел.

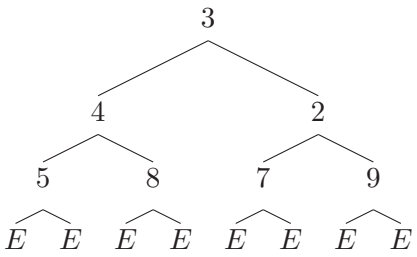
Способ первый, когда данные находятся в листях дерева:




```
type Tree1 =
  | Empty
  | Leaf of int
  | Node of Tree1 * Tree1
```

Здесь *Empty* и *Leaf* – конструкторы для пустого листа и листа с числом, а *Node* – конструктор узла дерева с двумя потомками.

Способ второй, когда данные находятся в узлах дерева:




```
type Tree2 =
  | Empty
  | Node of int * Tree2 * Tree2
```

Здесь конструктор *Node* имеет три аргумента – значение в узле и два потомка.

В качестве примера рассмотрим работу с деревьями первого типа. Можно написать функцию, которая будет умножать на два все значения в листьях дерева. Результатом работы функции будет дерево того же типа:

```
let rec mul2 Tree =
  match Tree with
    | Empty -> Empty
    | Leaf(x) -> Leaf(x*2)
    | Node(t1, t2) -> Node(mul2 t1, mul2 t2)
```

Функцию можно обобщить, чтобы она применяла произвольную операцию к значениям в листьях. Фактически, это будет аналог оператора проекции *map* для списков:

```
let rec map op Tree =
  match Tree with
    | Empty -> Empty
    | Leaf(x) -> Leaf(op x)
    | Node(t1, t2) -> Node(map op t1, map op t2)
```

Функции *eval* для арифметических выражений и для выражений логики высказываний, по сути, являются аналогами оператора свёртки для списков.

Деревья только для целых чисел не очень полезны. F# позволяет обобщить этот тип данных, чтобы в листьях можно было хранить данные произвольного (но только одного!) типа. В этом случае говорят, что тип *Tree параметризован* типом $'a$ (читается как α):

```
type 'a Tree =
  | Empty
  | Leaf of 'a
  | Node of 'a Tree * 'a Tree
```

Код функции *map не изменится*. Изменится только её тип: $map : ('a \rightarrow' b) \rightarrow 'a\ Tree \rightarrow 'b\ Tree$. Сравните его с типом функции *map* для списков.

Можно определить тип, параметризованный более, чем одним подтипом. Синтаксис F# в этом случае будет похож на работу с обобщёнными типами в .NET. Например, тип *Rope*, чередующий значения двух разных типов, можно было бы определить как $Rope <' a, 'b >$.

Параметризованные типы ещё называют *полиморфными типами данных*.

6 Списки как алгебраический тип данных

Списки в F# – это полиморфный тип данных, который определён следующим образом:

```
type 'a list =
  | Nil
  | Cons of 'a * 'a list
```

Где *Cons* – это уже известная операция конкатенации ::, а *Nil* – это пустой список []. Таким образом, запись $[1; 2; 3]$ – это просто *синтаксический сахар* для эквивалентной записи $1 :: 2 :: 3 :: []$ или

```
Cons(1, Cons(2, Cons(3, Nil)))
```

Благодаря этому при сопоставлении с образцом можно строить сложные конструкции, например, “список, начинающийся на [1; 2]”:

```
match list with
| 1 :: 2 :: tail -> tail
```

Или “список, где первый элемент единица, а третий – тройка”:

```
match list with
| 1 :: _ :: 3 -> true
```

Если в списке интересует элемент между 1 и 3, его можно получить, связав переменную:

```
match list with
| 1 :: n :: 3 -> n
```

Такую форму сопоставления можно использовать для любых алгебраических типов данных. Например, в примере с логикой высказываний можно добавить правило, снимающее двойное отрицание перед вычислением выражения:

```
| Not(Not(e)) -> eval e
| Not(e) -> not eval e
```

Стандартный модуль F# *List* содержит ряд полезных селекторов и предикатов для списков. Например, предикат *List.isEmpty* и селекторы *List.length*, *List.head* и *List.tail*.

7 Тип необязательных значений

Предположим, что нам необходимо написать функцию деления двух значений типа *float*.

```
let div x y = x / y
```

Как определить поведение функции, если делитель – ноль? Существует несколько вариантов:

1. Вернуть специальное значение типа *float*, зарезервированное для кода ошибки. Например, *infinity* – бесконечность.
2. Вызвать исключение, "развернув" стек вызовов функций.
3. Сгенерировать системное прерывание.
4. Вызвать функцию обработки ошибки, переданную в *div* в качестве аргумента.

Каждый из подходов имеет собственные недостатки. Например, в первом случае не всегда бывает возможно зарезервировать одно из значений в качестве константы – кода ошибки. Выход – определить новый тип данных, который будет хранить или ответ типа *float*, или ошибку:

```
type floatOrError =
| Result of float
| Error
```

Очевидно, что такое определение может быть полезно и для других типов. Например, "*string* или ошибка", "*int* или ошибка" и т.д. Эта идея воплощена во встроенном в F# типе *option*:

```
type 'a option =
| Some of 'a
| None
```

С помощью него можно переписать функцию деления *float*:

```
let div x y =
  match y with
  | 0 -> None
  | _ -> Some (x / y)
```

Её тип будет $float \to float \to float\ option$, а результат – $None$, если была попытка деления на ноль, иначе $Some$ с результатом вычисления.

Для работы с *option* удобно определить селекторы $isNone$ и $isSome$.

Рассмотрим функцию, которая умножает на два свой аргумент, заданный в виде типа *int option*. Она должна проверять два варианта:

```
let mulTwo arg =
  match arg with
  | None -> None
  | Some(x) -> Some(x*2)
```

Можно определить функцию, которая будет применять к аргументу произвольную операцию *op*:

```
let map op arg =
  match arg with
  | None -> None
  | Some(x) -> Some(op x)
```

Тип полученной функции: $('a \to' b) \to' a\ option \to' b\ option$. Такое определение абсолютно аналогично определению функций *map* для типов *list* и $Tree$, описанных выше. Во всех трёх случаях функция *map* принимает в качестве второго аргумента тип, параметризованный типом $'a$ и "превращает" его в тип, параметризованный другим типом – $'b$ с помощью функции из $'a$ в $'b$, указанной в первом аргументе.

При работе с данными, "завёрнутыми" в тип *option*, придётся либо постоянно проверять два варианта, либо в какой-то момент "достать" данные, по необходимости обработав ошибку.

Типы данных *list*, $Tree$ и *option* можно рассматривать как *конструкторы типов* или *операторы типов высших порядков*, т.к. они принимают типы в качестве аргументов и возвращают новые типы в качестве результата. Типы высших порядков будут подробнее рассмотрены в следующих лекциях.

Список литературы

[E.09] Кирпичёв Е. Элементы функциональных языков. *Журнал «Практика функциональноого программирования»*, 3(3), 2009.

[P.09] Душкин Р. Алгебраические типы данных и их использование в программировании. *Журнал «Практика функционального программирования»*, 2(2), 2009.