

Модуль 3. Тема 3.1

3-1 Реализуйте катаморфизм на синтаксическом дереве, который возвращает множество переменных, использованных в выражении.

3-2 Разработайте алгебраический тип и свёртки для следующих задач.

(а) У нас есть дерево документа, к примеру к лекции 3.1. Элементами дерева могут быть:

- параграф
- картинка
- ссылка
- текст

В каждом параграфе может быть произвольное количество картинок, подпараграфов, текста, ссылок и т.д.

Задача состоит в том, чтобы извлечь все ссылки для того, чтобы вывести их в конце презентации. Напишите для этого катаморфизм.

(б) Напишите катаморфизм, который удалит все картинки из документа.

Модуль 3. Тема 3.2

3-3 Реализуйте Rore с размером `chunk = 1` (в листьях подвешены единичные элементы). Балансировка отсутствует. Rore должен быть параметризован тремя типовыми аргументами: типом данных, хранящихся в дереве, типом меры, и типом моноида, реализующего операцию над мерой. По-видимому, удобнее всего это сделать в отсутствие классов типов – использовать аналогичную концепцию из мира ООП, интерфейсы. Заготовка приведена ниже.

```
type IMeasured<'V> =  
    abstract Value : 'V
```

```
type IMonoid<'V> =  
    abstract Zero : 'V  
    abstract Plus : 'V -> 'V -> 'V
```

```
type Singleton<'T when 'T : (new : unit -> 'T)> private () =  
    static let instance = new 'T()  
    static member Instance = instance
```

```
type Tree<'T, 'M, 'V when 'M :> IMonoid<'V> and 'M : (new :  
    unit -> 'M) and 'T :> IMeasured<'V>> =  
    | Leaf of 'T
```

```
| Node of 'V * Tree<'T, 'M, 'V> * Tree<'T, 'M, 'V>
```

```
type SumMonoid() =  
    interface IMonoid<int> with  
        member this.Zero = 0  
        member this.Plus a b = a + b
```

Здесь приведен интерфейс «измеримых» данных, интерфейс моноида, пример моноида, базовая реализация дерева (обратите внимание, как синтаксис `F#` позволяет наложить дополнительные ограничения на типовые параметры). Оператор `>` значит «является подтипом».

Отдельное внимание обратите на синглтон. Это известный паттерн в промышленном программировании: тип, у которого одновременно может существовать только один экземпляр. Это именно то, что нам нужно, чтобы пользоваться моноидами: моноидальная операция `Plus` принадлежит типу, а не его экземплярам, но для её вызовов экземпляры все-таки приходится создавать. Чтобы избавиться от этого неудобства, тип моноида делают синглтоном. Тогда, чтобы обращаться к операции, можно использовать следующий код:

```
let monoid = Singleton<SumMonoid>.Instance  
let x = monoid.Plus 1 1
```

(a) Для этого `Core` реализуйте:

- Построение дерева по массиву (списку) данных, произвольным способом. Желательно организовать построение так, чтобы полученное дерево сразу имело высоту $O(\log N)$.
- Изменение элемента по индексу (с перевычислением мер по пути).
- Слияние двух веревок за $O(1)$.
- Вычисление меры на подотрезке.
- Разрезание по предикату.

Если какие-то из операций удастся реализовать через уже реализованные другие – отлично, это только лучше.

- (b) Реализуйте моноид статических характеристик выборки. Пользуясь классом `System.Random`, сгенерируйте 100 выборок размера 50, постройте из них дерево и выведите характеристики результирующей выборки. Проверьте результат, слив выборки вручную и подсчитав характеристики по определению.
- (c) * Имеется кабель из k проводов, который идет из точки A в точку B . Кабель выходит на поверхность в N местах, не считая начало и конец ($N \leq 10^5$). Между этими точками кабель залегает глубоко под землей, и доступа к нему нет.

У монтера-электрика дяди Васи выдался плохой день, и этим вечером он, основательно отдохнув, решил отомстить всему этому несправедливому миру. На протяжении вечера во время «основательного отдыха» периодически дядя Вася озлобляется и идет к кабелю – мстить за свой плохой день. Всего за день это произошло T раз ($T \leq 10^5$).

Суть каждой мести заключается в том, что дядя Вася идет к какому-нибудь из N мест, откуда он может достать до кабеля, разрезает его и перепутывает в нем провода. Более строго, дядя Вася выбирает какое-то место $1 \leq i \leq N$ и разрезает кабель в этом месте. Теперь в левой руке (ближней к точке A) у него k проводов в ряд, и в правой руке (ближней к точке B) у него тоже k проводов в ряд. Дядя Вася каким-то случайным образом присоединяет каждый из k проводов слева к какому-то из k проводов справа (взаимно однозначно), заматывает все изолентой и со злорадной улыбкой удаляется. Теперь информация, посланная из точки A по проводу № j ($1 \leq j \leq k$), придет в точку B не на выход № j , а на какой-то другой.

Поскольку всю эту процедуру дядя Вася проделывал T раз в разных местах кабеля, все провода безнадежно перепутались. Наутро неблагодарные жильцы района нашли дядю Васю и убедительно попросили его рассказать им, какой же из выходов кабеля какому входу теперь соответствует. После продуктивного вечернего отдыха дядя Вася оказался не в силах решить такую тяжелую вычислительную задачу. Зато, к своему удивлению, он помнил в точности, какие локальные перепутывания в каких точках он производил. То есть, для каждого из T перепутываний в хронологическом порядке дядя Вася может рассказать, какие провода в левой руке он соединял с какими проводами в правой руке, а также где это все происходило. Естественно, что, поскольку перепутываний было много, то провод №1 в левой руке дяди Васи к концу вечера совершенно не обязательно соответствует проводу №1 в точке A . С правой рукой та же проблема.

Вам дан список T воспоминаний дяди Васи. Каждое воспоминание содержит точку очередной диверсии n ($1 \leq n \leq N$) и список соответствий перепутывания в нумерации с точки зрения дяди Васи, глядящего в этот момент на разрезанный кабель (например, $1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 8, \dots$). Гарантируется, что воспоминания даны в хронологическом порядке.

Пользуясь теорией моноидальных вычислений и запрограммированным ранее деревом, помогите жильцам района и вычислите итоговую таблицу соответствия проводов кабеля в точке

А проводам в точке B после всех махинаций дяди Васи.

К примеру, пусть $k = 4$, $N = 3$, $T = 2$. Первое перепутывание происходит в точке $n = 3$ по схеме $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 1$, второе – в точке $n = 1$ по схеме $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3$. Тогда в итоге провода будут соответствовать следующим образом: $1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 3$ (см. рисунок).

